EWMS, Serie 10

Jamal Drewlo, Daniel Max, Stefan Engelhardt

26. Januar 2021

Aufgabe 30

Sei X eine Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und es soll X die Anzahl der Passagiere beschreiben, die zum Start erscheinen.
Dann gilt $X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.95)$. Es bekommen genau dann alle Passagiere einen Platz, wenn höchstens 95 Passagiere entscheiden. Es gilt also $P(X \leq 95)$ zu bestimmen. Wir haben

$$\begin{aligned} P(X \leq 95) &= 1 - P(X \geq 96) \\ &= 1 - \sum_{k=96}^{100} P(X = k) \\ &= 1 - \sum_{k=96}^{100} \binom{100}{k} 0.95^k 0.05^{100-k} \\ &\approx 1 - 0.436 \\ &= 0.564 \end{aligned}$$

Alternativ können wir die Punktwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Poisson-Approximation approximeren. Dabei nutzen wir, dass $X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.95) = \mathrm{Bin}(100, \frac{95}{100})$ gilt.

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{k=96}^{100} P(X = k) &\approx 1 - \sum_{k=96}^{100} e^{-95} \frac{95^k}{k!} \\ &\approx 1 - 0.190 \\ &= 0.810 \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dass die Poisson-Approximation in diesem Fall recht schlecht ist. Allerdings können wir sie mit einem anderen Ansatz verbessern. Sei also nun Y die Anzahl der **nicht** erschienenen Passagiere. Dann ist $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 0.05)$. Es finden alle Passagiere einen Platz, wenn mindestens 5 nicht erscheinen. Mit der Poisson-Approximation ($p = 0.05 = \frac{5}{100}$) haben wir

$$\begin{aligned} P(Y \geq 5) &= 1 - P(Y < 5) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{4} P(Y = k) \\ &\approx 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{4} \frac{5^k}{k!} \\ &\approx 1 - 0.44 \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

Aufgabe 31

(i)
Wir haben gegeben:

$$\begin{aligned} &P(F_1) = 0.04 \\ &P(F_1 \cap F_2) = 0.0025 \\ &P(F_1 \cup F_2) = 0.1 \end{aligned}$$

Nach der Siebformel gilt

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)$$

Also

$$P(F_2) = P(F_1 \cup F_2) - P(F_1) + P(F_1 \cap F_2) = 0.1 - 0.04 + 0.0025 = 0.0625$$

Damit haben wir nun

$$P(F_1)P(F_2) = 0.04 \cdot 0.0625 = 0.0025 = P(F_1 \cap F_2)$$

Daher sind die Ereignisse unabhängig.
(ii)

Es beschreibe die Zufallsvariable X_n, die Anzahl der Rechner mit beiden Fehlern bei n entnommenen Rechnern. Dann ist $X \sim \text{Bin}(n, 0.0025)$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
& 0.99 \leq P(X_n \geq 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0.0025^0 \cdot 0.9975^n \\
\iff & \underbrace{0.9975^n}_{=e^{n \ln(0.9975)}} \leq 0.01 \\
\iff & n \ln(0.9975) \leq \ln(0.01) \\
\overset{\ln(0.9975)<1}{\iff} & n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.9975)} \approx 1839.8
\end{aligned}$$

Also muss man mindestens 1840 Rechner entnehmen.
(iii)
Es beschreibe die Zufallsvariable Y die Anzahl der Rechner mit Fehler 1. Dann ist $Y \sim \text{Bin}(750, 0.04)$. Ferner gilt für Erwartungswert μ und Standardabweichung σ

$$\mu = 750 \cdot 0.04 = 30$$

und

$$\sigma = \sqrt{750 \cdot 0.04 \cdot 0.96} \approx 5.3666$$

Mit Folgerung 8.8 haben wir nun

$$\begin{aligned}
P(Y < 20) &= P(Y \leq 19) \\
&= P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{19 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq -2.0497\right) \\
&\overset{\text{Folg.8.8}}{\approx} \Phi(-2.0497) \\
&\overset{\text{Symmetrie}}{=} 1 - \Phi(2.0497) \\
&\approx 1 - 0.97981 \\
&= 0.02019
\end{aligned}$$